جبر خطی

نیم‌سال اول ۹۹

مدرس: دکتر حمیدرضا ربیعی

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری چهارم — **دترمینان، بردار و مقدار ویژه، قطری سازی** — تاریخ تحویل:۱۱ آذر

---

۱. موارد زیر را ثابت کنید.

(آ) اگر ماتریس‌های $A_1, A_2, ..., A_m$ ماتریس‌های مربعی باشند(ماتریس بلوکی زیر بالا مثلثی است و ماتریس‌های مربعی ذکر شده روی قطر اصلی قرار دارند):

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & A_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_m \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$det(A) = det(A_1)det(A_2)...det(A_m)$$

(ب) اگر ماتریس‌های A و B ماتریس‌های دلخواه باشند:

$$det \begin{bmatrix} A_{n*n} & B_{n*n} \\ B_{n*n} & A_{n*n} \end{bmatrix} = det(A-B)det(A+B) \tag{2}$$

(ج) اگر ماتریس A وارون پذیر باشد:

$$det \begin{bmatrix} A_{n*n} & B_{n*k} \\ C_{k*n} & D_{k*k} \end{bmatrix} = det(A)det(D - CA^{-1}B) \tag{3}$$

(د) با استفاده از قسمت قبل، نشان دهید اگر A_{n*n} وارون پذیر باشد و B_{n*1} و C_{1*n} را داشته باشیم،

$$det(A + BC) = det(A)(1 + CA^{-1}B) \tag{4}$$

(ه) با استفاده از قسمت قبل، تساوی زیر را ثابت کنید(تمامی مقادیر λ ناصفر هستند):

$$det \begin{bmatrix} 1+\lambda_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+\lambda_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+\lambda_m \end{bmatrix} = (\prod_{i=1}^{n} \lambda_i)(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}) \tag{5}$$

۲. (آ) اگر A_{n*n} یک ماتریس متعامد و نرمال باشد و λ مقدار ویژه آن باشد، ثابت کنید که :

$$|\lambda| = 1 \tag{6}$$

(ب) فرض کنید که ماتریس‌های A و B ماتریس‌هایی متعامد نرمال باشند. اگر $det(A) + det(B) = ۰$ ، ثابت کنید که :

$$det(A + B) = ۰ \tag{۷}$$

۳. دو ماتریس ستونی $a_{n*۱}$ و $b_{n*۱}$ داریم. ثابت کنید که $C = ab^T$ قطری پذیر است، اگر و تنها اگر $a^Tb \neq ۰$ (فرض کنید که هر دو بردار ناصفر هستند).

۴. با استفاده از عملیات سطری و ویژگی های دترمینان، عبارت زیر را محاسبه کنید.

$$det\begin{bmatrix} ۱ & a & a^۲ \\ ۱ & b & b^۲ \\ ۱ & c & c^۲ \end{bmatrix} \tag{۸}$$

۵. ماتریس متقارن پاسکال (Symmetric Pascal Matrices) دترمینان برابر یک دارد.

$$det\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۳ & ۶ & ۱۰ \\ ۱ & ۴ & ۱۰ & ۲۰ \end{bmatrix} = ۱ \tag{۹}$$

به کمک این داده، دترمینان ماتریس زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۳ & ۶ & ۱۰ \\ ۱ & ۴ & ۱۰ & ۱۹ \end{bmatrix} \tag{۱۰}$$

۶. ماتریس B یک ماتریس ۳ در ۳ است و مقادیر ویژه آن ۰، ۱ و ۲ هستند. موارد زیر را محاسبه کنید(برای مواردی که اطلاعات برای محاسبه آن کافی نیست مثال نقضی بیاورید).

- مرتبه (Rank) B
- دترمینان B^TB
- مقادیر ویژه B^TB
- مقادیر ویژه $(B^۲ + I)^{-۱}$

۷. ماتریس های Λ و S را به منظور قطری سازی A بیابید. ($A = S\Lambda S^{-۱}$)

$$A = \begin{bmatrix} ۰/۶ & ۰/۹ \\ ۰/۴ & ۰/۱ \end{bmatrix} \tag{۱۱}$$

(آ) مقدار حد عبارت Λ^k وقتی $k \to \infty$ چقدر است؟

(ب) مقدار حد ماتریس $S\Lambda^kS^{-۱}$ چقدر است؟